26/10/2017

Μάθημα 3ο

Δείκτης ή αριθμός κατάστασης αντιστρέψιμου πίνακα A ως προς τη φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ ορίζεται ως:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Αν ο δείκτης κατάστασης είναι πολύ μεγάλος τότε λέμε ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει κακή κατάσταση

> Μικρά σφάλματα στους υπολογιστές επιφέρουν μεγάλα σφάλματα στη λύση.

> Ορίζουμε ως δείκτη κατάστασης μη αντιστρέψιμου πίνακα το $+\infty$.

> Για τον δείκτη κατάστασης ως προς μια φυσική νόρμα ισχύει:

$$\frac{1}{K(A)} \leq \inf_{B \in \mathbb{R}^{n,n},\ \det B = 0} \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$$

Απόδειξη

Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ τ.ω. $Bx = 0$ όπου $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ μη αντιστρέψιμος. Τότε:

$(A-B)x = Ax \iff A^{-1}(A-B)x = x \Rightarrow$

$\|x\| = \|A^{-1}(A-B)x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(A-B)\| \cdot \|x\| \iff$

$1 \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A-B\| \iff$

$\frac{1}{K(A)} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A-B\|}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \iff \frac{1}{K(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \quad \forall B: \det B = 0$

Θα ισχύει και για B που δίνει το inf.

Σχόλιο: Ο δείκτης φυσικής νόρμας είναι μεγαλύτερος της μονάδας:

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = K(A) \Rightarrow 1 \le K(A) \Rightarrow K(A) \ge 1$$

Άσκηση 1 σελ 24

Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο ως $A = B + C$ όπου B ερμιτιανός ($B^H = B$) και C αντι-ερμιτιανός ($C^H = -C$)

Λύση

$$A = \frac{A + A^H}{2} + \frac{A - A^H}{2} = B + C$$

$$B^H = \left(\frac{A + A^H}{2}\right)^H = \frac{A^H + A}{2} = B \quad \text{άρα ερμιτιανός}$$

$$C^H = \left(\frac{A - A^H}{2}\right)^H = \frac{A^H - A}{2} = -\frac{A - A^H}{2} = -C \quad \text{άρα αντι-ερμιτιανός}$$

άλλος τρόπος

$A = B + C \Rightarrow A^H = B^H + C^H \Rightarrow A^H = B - C$. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} A &= B + C \\ A^H &= B - C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} B &= (A + A^H)/2 \\ C &= (A - A^H)/2 \end{aligned}\right.$$

Άρα ο τρόπος είναι μοναδικός

→ Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ν.δ.ο. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trace(A)$

και $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$P_n(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|$

$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn}) =$

Το $P_n(\lambda)$ έχει ρίζες τις ιδιοτιμές λ_i, $i = 1(1)n$

$P_n(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Άσκηση

$\|\cdot\|_F : \mathbb{C}^{n,n} \mapsto \mathbb{R}^{+,0}$ Νόρμα Frobenius

$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

$\|A+B\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||b_{ij}|$

Εφαρμόζω Cauchy-

$$\leq \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$= \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + 2\|A\|_F\|B\|_F = (\|A\| + \|B\|)^2$$

Ισχύει γενικά: $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$

Άσκηση 8

$\|A\|_{max} = \max\limits_{i,j=1(1)n} |a_{ij}|$ ν.δ.ο. δεν είναι νόρμα.

Έστω $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\|A\|_{max} = \|B\|_{max} = 1$, $\|AB\|_{MAX} = 2$.

$\|A\|_{MAX} \cdot \|B\|_{MAX} < \|AB\|_{MAX}$

Άσκηση 2 σελ 24

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ μη αντιστρ. και $A = B + C$ όπου B αντιστρέψιμος

Ν.δ.ο. $\rho(B^{-1}C) \geq 1$ και $\|B^{-1}\| \geq 1/\|C\|$ για οποιαδ. φυσική νόρμα

$Ax = 0$, $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \xRightarrow{A \text{ αντιστρ.}} (B+C)x = 0 \Leftrightarrow Bx + Cx = 0 \Leftrightarrow$

$Bx = -Cx \Leftrightarrow x = -B^{-1}Cx$

Ο $B^{-1}C$ έχει ιδιοτιμή την $-1 \Rightarrow \rho(B^{-1}C) \geq 1$

$1 \leq \rho(B^{-1}C) \leq \|B^{-1}C\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|C\| \Rightarrow 1 \leq \|B^{-1}\| \cdot \|C\| \xRightarrow{C \neq 0}$

$\|B^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|C\|}$

Άσκηση 7 σελ 44 (Απαλοιφή Gauss)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

να λυθεί με απαλοιφή Gauss και με L-U παραγοντοποίηση.

Λύση

$$\begin{array}{c} \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ & \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ & \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ & & \boxed{4/3} & \boxed{4/3} \end{array}\right]$$

Απ: $x^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = LU$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow L \underbrace{Ux}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4/3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = I \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{Y} = I \Leftrightarrow \begin{cases} LY = I \\ UX = Y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & 3/2 & -1 \\ & & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} = X = A^{-1}$$

A: συμμετρικός

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

κεντροσυμμετρικός

Άσκηση

Να λυθεί το γρ. σύστημα $Ax = b$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.
Να βρεθεί ο μεταθετικός πίνακας P.
Να γίνει η L-U παραγοντοποίηση του PA.

Λύση

$$\begin{array}{l|ccc|c} (0) & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \left(\frac{2}{5}\right) & 2 & -2 & -1 & 3 \\ & \underline{5} & 3 & 1 & 3 \\ \hline \left(-\frac{5}{16}\right) & & 1 & 2 & 1 \\ & & \underline{-\frac{16}{5}} & -\frac{7}{5} & \frac{9}{5} \\ & & & \underline{\frac{25}{16}} & \frac{25}{16} \end{array}$$

$$i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αναδιάταξη γραμμών.

$$x^T = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{PA = LU}$$

$$PA = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/5 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -16/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 25/16 \end{bmatrix}}_{U}$$